

Магнитные токи и векторный потенциал электрического поля

Ф. Ф. Менде

Закон Ампера, выраженный в векторной форме, определяет магнитное поле в точке x, y, z в следующем виде:

$$\vec{H} = \int \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

где I - ток в элементе $d\vec{l}$, $\vec{r}$ - вектор, направленный из $d\vec{l}$ в точку x, y, z .

Можно показать, что

$$\frac{[d\vec{l}\vec{r}]}{r^3} = \text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) \times d\vec{l}$$

и, кроме того, что

$$\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) \times d\vec{l} = \text{rot}\left(\frac{d\vec{l}}{r}\right) - \frac{1}{r} \text{rot } d\vec{l}.$$

Но ротор $d\vec{l}$ равен нулю и поэтому окончательно

$$\vec{H} = \text{rot} \int I \left(\frac{d\vec{l}}{r} \right) = \text{rot } \vec{A}_H.$$

В данном выражении

$$\vec{A}_H = \int I \left(\frac{d\vec{l}}{r} \right), \quad (1)$$

где $\vec{A}_H$ - векторный потенциал магнитного поля.

.

Поскольку $I = gv$, где g количество зарядов, приходящееся на единицу длины проводника, из (1) получаем:

$$\vec{A}_H = \int \frac{gv d\vec{l}}{r}.$$

При непрерывном распределении токов по рассматриваемой области можно выразить векторный потенциал через плотность электрических токов

$$\vec{j}_E = ne\vec{v} = \text{rot}\vec{H}, \quad (2)$$

где n - плотность электронов, e - заряд электрона, $\vec{v}$ - скорость электронов.

Тогда

$$\vec{A}_H = \int \frac{\vec{j}_E dV}{r} \quad (3)$$

По аналогии с (2) можно ввести и плотность магнитных токов

$$\vec{j}_H = \text{rot} \vec{E} \quad (4)$$

И соответствующий им векторный потенциал электрического поля

$$\vec{A}_E = \int \frac{\vec{j}_H dV}{r}$$

Фарадей при проведении опытов установил, что в контуре индуцируется ток, когда в соседнем контуре включается или выключается постоянный ток или соседний контур с постоянным током движется относительно первого контура. Поэтому в общем виде закон Фарадея записывается следующим образом:

$$\oint \vec{E}' d\vec{l}' = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (5)$$

Данная запись закона указывает на то, что при определении циркуляции $\vec{E}$ в движущейся (штрихованной) системе координат, около $\vec{E}$ и $d\vec{l}$ должны стоять штрихи и следует брать полную производную. Если же циркуляция

определяется в неподвижной системе координат, то штрихи около $\vec{E}$ и $d\vec{l}$ отсутствуют, но при этом справа в выражении (5) должна стоять частная производная по времени. Обычно при записи закона магнитоэлектрической индукции на этом внимание почему-то не акцентируется.

Полная производная по времени в соотношении (5) означает независимость конечного результата появления э.д.с. в контуре от способа изменения потока. Поток может изменяться как за счет чисто временных изменений $\vec{B}$, так и за счет конвекционной составляющей, когда система, в которой измеряется циркуляция $\oint \vec{E}' d\vec{l}'$, движется в пространственно меняющемся поле $\vec{B}$. Величина магнитного потока в соотношении (5) дается выражением

$$\Phi_B = \int \vec{B} d\vec{s}', \quad (6)$$

где магнитная индукция $\vec{B} = \mu \vec{H}$ определена в неподвижной системе координат, а элемент $d\vec{s}'$ определен в движущейся системе. Учитывая (5), из (6) получаем

$$\oint \vec{E}' d\vec{l}' = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{s}'.$$

И далее, поскольку $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \text{ grad}$, запишем

$$\oint \vec{E}' d\vec{l}' = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s}' - \int [\vec{B} \times \vec{v}] d\vec{l}' - \int \vec{v} \text{ div} \vec{B} d\vec{s}'. \quad (7)$$

В данном случае контурный интеграл берется по контуру $d\vec{l}'$, охватывающему площадку $d\vec{s}'$. Полученный результат имеет место в случае справедливости преобразований Галилея, т.е. $d\vec{l}' = d\vec{l}$ и $d\vec{s}' = d\vec{s}$. Из (7) следует хорошо известный результат

$$\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}], \quad (8)$$

из которого следует, что в ИСО, движущейся в магнитном поле, возникает дополнительное электрическое поле, определяемое последним слагаемым соотношения (8). Заметим, что это соотношение получено не путем введения постулата о силе Лоренца, или из ковариантных преобразований Лоренца, а непосредственно из закона Фарадея, причем в рамках преобразований Галилея. Таким образом, сила Лоренца является прямым следствием закона магнитоэлектрической индукции.

Из закона Ампера следует соотношение

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}_H.$$

Тогда соотношение (7) для индуцированных полей можно переписать

$$\vec{E}' = -\mu \frac{\partial A_H}{\partial t} + \mu [\vec{v} \times \text{rot } \vec{A}],$$

и далее

$$\vec{E}' = -\mu \frac{\partial \vec{A}_H}{\partial t} - \mu (\vec{v} \nabla) \vec{A}_H + \mu \text{grad} (\vec{v} \vec{A}_H). \quad (9)$$

При рассмотрении сил, действующих на заряд, мы ограничились случаем, когда время запаздывания, необходимое для прохождения сигнала от

источника, генерирующего векторный потенциал, до самого заряда было значительно меньше, чем период колебаний тока в проводниках. Теперь снимем такое ограничение.

Второе уравнение Максвелла в терминах векторного потенциала можно записать следующим образом:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}_H = \vec{j}(\vec{A}_H), \quad (10)$$

где $\vec{j}(\vec{A}_H)$ - некоторый функционал от $\vec{A}_H$, зависящий от свойств рассматриваемой среды. Если, например, $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, т.е. выполняется закон Ома, то

$$\vec{j}(\vec{A}_H) = -\sigma \mu \frac{\partial \vec{A}_H}{\partial t}. \quad (11)$$

Для свободного пространства имеет место соотношение

$$\vec{j}(\vec{A}_H) = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}_H}{\partial t^2}. \quad (12)$$

Для свободных зарядов, которые могут двигаться без трения, функционал будет иметь вид

$$\vec{j}(\vec{A}_H) = -\frac{\mu}{L_k} \vec{A}_H, \quad (13)$$

где $L_k = \frac{m}{ne^2}$ - кинетическая индуктивность зарядов. В этом соотношении m , e и n - масса заряда, его величина и плотность соответственно.

Соотношения (11 – 13) отражают известный факт о существовании трех видов электрического тока: активного и двух реактивных. Каждый из них имеет характерную зависимость от векторного потенциала. Эта зависимость и определяет правила распространения векторного потенциала в различных средах. Здесь следует подчеркнуть, что написание соотношений (11 – 13) предполагает не только наличие тока, но и наличие тех материальных сред, которые могут такие токи пропускать. Ток проводимости, определяемый соотношениями (11) и (13), могут пропускать через себя проводники, в которых имеются свободные носители тока. Емкостной ток, или ток смещения, может пропускать через себя свободное пространство или диэлектрики. Для свободного пространства соотношение (10) имеет вид:

$$\text{rot rot} \vec{A}_H = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}_H}{\partial t^2}.$$

Это волновое уравнение, свидетельствующее о том, что векторный потенциал может распространяться в свободном пространстве в виде плоских волн.

Всё сказанное свидетельствует о том, что векторный потенциал имеет очень важное значение в классической электродинамике. Его использование проливает свет на многие физические явления, которые ранее понятны не были. И, если удастся выяснить физическую природу этого потенциала, то буде решена очень важная задача как теоретического, так и прикладного плана.

Закон Фарадея показывает, каким образом изменение магнитных полей приводит к появлению электрических полей. Однако возникает вопрос, а приводит ли изменение электрических полей к возникновению каких-либо других полей и, в частности, магнитных? Ответ на этот вопрос дал Максвелл, введя ток смещения в свое второе уравнение. В случае отсутствия токов проводимости второе уравнение Максвелла выглядит следующим образом:

$$\text{rot } \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

где $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ - электрическая индукция.

От этого соотношения нетрудно перейти к выражению

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}, \quad (14)$$

где $\Phi_E = \int \vec{D} d\vec{s}$ поток электрической индукции.

Однако для полного описания процессов взаимной электрической индукции соотношения (14) недостаточно. Как и в случае закона Фарадея, следует учесть то обстоятельство, что поток электрической индукции может меняться не только за счет локальной производной электрического поля по времени, но и за счет того, что контур, вдоль которого производится интегрирование, может двигаться в пространственно меняющемся электрическом поле. Это означает, что в соотношении (14), как и в случае закона Фарадея, следует заменить частную производную на полную. Обозначая штрихами поля и элементы контура в движущейся ИСО, получим:

$$\oint \vec{H}' d\vec{l}' = \frac{d\Phi_E}{dt},$$

и далее

$$\oint \vec{H}' d\vec{l}' = \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{s}' + \oint [\vec{D} \times \vec{v}] d\vec{l}' + \int \vec{v} \text{div} \vec{D} d\vec{s}'. \quad (15)$$

Для электронейтральной среды $\text{div} \vec{E} = 0$, поэтому последний член правой части в этом выражении исчезает. Для этого случая соотношение (15) будет иметь вид:

$$\oint \vec{H}' d\vec{l}' = \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{s}' + \oint [\vec{D} \times \vec{v}] d\vec{l}'. \quad (16)$$

Если в этом соотношении перейти от интегрирования по контуру к интегрированию по поверхности, то получим:

$$\operatorname{rot} \vec{H}' = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \operatorname{rot} [\vec{D} \times \vec{v}]. \quad (17)$$

Если, исходя из этого соотношения, записать поля в данной инерциальной системе, то штрих около $\vec{H}$ и второй член правой части исчезнут, и получим ток смещения, введенный Максвеллом. Но Максвелл ввел этот параметр, не прибегая к закону электромагнитной индукции (15). Если свой закон магнитоэлектрической индукции Фарадей вывел на основании экспериментов с магнитными полями, то эксперименты по установлению справедливости соотношения (15) в то время провести было невозможно, т.к. для проведения такого эксперимента не хватало чувствительности существующих измерительных приборов.

Для случая постоянных электрических полей из (17) получаем:

$$\vec{H}'_v = -\varepsilon [\vec{v} \times \vec{E}]. \quad (18)$$

Для вихревых электрических полей можно выразить электрическое поле через ротор электрического векторного потенциала, положив

$$\vec{E} = \operatorname{rot} \vec{A}_E. \quad (19)$$

Но введение такого соотношения является, по сути дела, признанием существования магнитных токов. Полемика о наличии таких токов и о возможности существования магнитных монополей в научной литературе ведется давно. Единой точки зрения по этому вопросу пока нет. Но наличие магнитных токов очень легко понять из такого примера. Предположим, что в нашем распоряжении имеется длинный стержень, выполненный из магнитного материала. Если на одном конце стержня разместить соленоид и ввести в него ток, то конец стержня намагнитится. Но намагниченность, возникшая на конце стержня, не сразу появится на другом его конце. Волна намагниченности будет распространяться вдоль стержня с какой-то скоростью, зависящей от кинетических свойств самого процесса намагничивания. Таким образом, сам магнитный стержень, в данном случае, подобно проводнику электрического тока, является проводником магнитного потока, который, как и ток проводимости, может распространяться с конечной скоростью.

Соотношение (17) с учетом (19) запишется:

$$\vec{H}' = \varepsilon \frac{\partial \vec{A}_E}{\partial t} - \varepsilon \left[\vec{v} \times \text{rot } \vec{A}_E \right].$$

Далее можно повторить все те процедуры, которые уже проводились с магнитным векторным потенциалом, и записать следующие соотношения:

$$\vec{H}' = \varepsilon \frac{\partial \vec{A}_E}{\partial t} + \varepsilon (\vec{v} \nabla) \vec{A}_E - \varepsilon \text{grad} (\vec{v} \vec{A}_E),$$

$$\vec{H}' = \varepsilon \frac{\partial \vec{A}_E}{\partial t} - \varepsilon \left[\vec{v} \times \text{rot } \vec{A}_E \right],$$

$$\vec{H}' = \varepsilon \frac{dA_E}{dt} - \varepsilon \text{grad} (\vec{v} A_E).$$

Введение полных производных в законах индукции существенно проясняет физику этих процессов и даёт возможность выделить составляющие сил, действующих на заряд. Этот метод даёт также возможность получить законы преобразования полей при переходе из одной ИСО в другую. В этом и состоит модернизация старой электродинамики, хотя физическая сущность введённых потенциалов остаётся, как и ранее, не ясна.