Функция Лагранжа заряда в концепции скалярно-векторного потенциала

Ф. Ф. Менде

Одним из методов решения задач механики является лагранжев фомализм. Под функцией Лагранжа или лагранжианом в механике понимают разность между кинетической и потенциальной энергией рассматриваемой системы. Если проинтегрировать лагранжиан по времени, то получим первую главную функцию Гамильтона, называемую действием. В общем случае кинетическая энергия системы зависит от скорости, а потенциальная энергия зависит от координат. При условии консерватизма системы лагранжев формализм предполагает принцип наименьшего действия, когда система при своём движении выбирает путь, при котором действие является минимальным. Однако запись лагранжиана, принятая в электродинамике не в полной мере удовлетворяет условию консерватизма системы. Векторный потенциал, в котором движется заряд, создают сторонние движущиеся заряды, и движущийся заряд взаимодействует не с полем векторного потенциала, а с движущимися зарядами, влияя на их движение. Но существующие модели это обстоятельство не учитывает, т.к. векторный потенциал выступает самостоятельной субстанцией, с которой и взаимодействует движущийся заряд. Более того, в обобщённый импульс движущегося заряда вводится скалярное произведение его скорости и векторного потенциала, в котором заряд движется. Но этот член представляет не кинетическую, а потенциальную энергию, что противоречит определению импульса в механике. С этими обстоятельствами и связаны те ошибки, которые имеют место в трудах по электродинамике. В работе показано, что использование концепции скалярно-векторного потенциала для вычисления лагранжиана движущегося заряда даёт возможность исключить ошибки, имеющиеся в современной электродинамике.

Ключевые слова: функция Лагранжа, скалярный потенциал, функция Гамильтона, обобщённый импульс, скалярно-векторный потенциал.

1. Введение

Одним из методов решения задач механики является лагранжев фомализм. Под функцией Лагранжа или лагранжианом в механике понимают разность между кинетической и потенциальной энергией рассматриваемой системы

$$L = W_k(t) - W_p(t).$$

Если проинтегрировать лагранжиан по времени, то получим первую главную функцию Гамильтона, называемую действием. Поскольку в общем случае кинетическая энергия системы зависит от скорости, а потенциальная энергия зависит от координат, то действие может быть записано как

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, v_i)dt$$

При условии консерватизма системы лагранжев формализм предполагает принцип наименьшего действия, когда система при своём движении выбирает путь, при котором действие является минимальным. В электродинамике лагранжиан заряда, двигающегося с релятивистской скоростью, записывается следующим образом [1]:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - q\left(\varphi + \mu_0(\vec{v}\vec{A}_H)\right). \tag{1.1}$$

Для нерялитивистских скоростей это выражение запишется:

$$L = \frac{mv^2}{2} - q\left(\varphi + \mu_0(\vec{v}\vec{A}_H)\right)$$

где q, m и $\vec{v}$ - заряд масса и скорость заряда, c - скорость света, μ_0 - магнитная проницаемость вакуума, φ - скалярный потенциал электрического поля, $\vec{A}_H$ - векторный потенциал магнитного поля, в котором движется заряд. Данное выражение и далее все соотношения записываются в системе единиц СИ. Однако такая запись не в полной мере удовлетворяет условию консерватизма системы. Векторный потенциал, в котором движется заряд, создают сторонние движущиеся заряды, и движущийся заряд взаимодействует не с полем векторного потенциала, а с движущимися зарядами, влияя на их движение. Но представленная модель это обстоятельство не учитывает, т.к. векторный потенциал выступает самостоятельной субстанцией, с которой и взаимодействует движущийся заряд.

В работе [2] имеются недоразумения, на стр. 279 читаем: «Поэтому даже в релятивистском приближении функцию Лагранжа в электромагнитном поле не может быть представлена в виде разности кинетической и потенциальной энергии» (конец цитаты). В соотношении (1.1), автора смущает член, содержащий скалярное произведение скорости заряда и векторного потенциала, и он не знает, к какому виду энергии его отнести.

Между прочим, эта неопределённость не миновала и работ Ландау [3]. Вопросам введения действия и функции Лагранжа движущегося заряда в этой работе посвящены параграфы 16 и 17. При введения этих понятий в параграфе 16 делается следующее замечание: «Следующие ниже утверждения нужно рассматривать в значительной степени как результат опытных данных. Вид действия для частицы в электромагнитном поле не может быть установлен на основе только общих соображений, таких как требование релятивистской инвариантности. (последнее допускало бы в действии также и член вида интеграл от Ads, где A скалярная функция)» (конец цитаты).

Но при дальнейшем рассмотрении этого вопроса никаких опытных данных автор не приводит и совершенно не понятно, на каких основаниях вводит функция Лагранжа в виде (1.1). Дальше - ещё хуже. Не понимая физической сущности лагранжиана, и по сути дела угадав его (см. соотношение (17.4) в [3]), автор сразу же включает потенциальную часть (скалярное произведение скорости и векторного потенциала) в обобщённый импульс, а затем для нахождения силы берёт производную по координате от лагранжиана, вычисляя градиент от этой величины (см. соотношение после равенства (18.1) [3]). Но, находя градиент от указанного произведения, автор тем самым признаёт его потенциальный статус.

В механике под импульсом понимают произведение массы частицы на её скорость. Умножая импульс на скорость, получают механическую энергию. В электродинамике, в связи с тем, что заряд имеет массу, также вводится понятие кинетического импульса. Но это не всё. Вводится также понятие обобщённого импульса

$$\vec{P} = m\vec{v} + q\vec{A},$$

когда к кинетическому импульсу добавляют произведение заряда на векторный потенциал магнитного поля, в котором движется заряд. Причём даже при незначительных магнитных полях эта добавка значительно превосходит кинетический импульс. Если обобщённый импульс скалярно умножить на скорость

$$\vec{v}\vec{P} = m(\vec{v})^2 + q\vec{v}\vec{A}, \qquad (1.2)$$

то кинетический импульс даст кинетическую энергию. Скалярное произведение скорости и векторного потенциала также даст энергию, вот только эта энергия оказывается не кинетической, а потенциальной. Вот и получается сборная солянка, когда в состав энергии движущегося заряда входит и кинетическая, и потенциальная энергия. С этим и связано то непонимание физической природы последнего члена в соотношении (1.2), имеющее место в работе [2].

Мы уже сказали, что запись лагранжиана в форме (1.1) не удовлетворяет условию консерватизма системы. Это связано с тем, что векторный потенциал, входящий в это соотношение, связан с движением сторонних зарядов, с которыми и взаимодействует движущийся заряд. Изменение скорости заряда, для которого находится лагранжиан, повлечёт за собой изменение скорости этих зарядов, и на это будет потрачена энергия движущегося заряда. Для того, чтобы обеспечить консерватизм системы, необходимо знать энергию взаимодействия движущегося заряда со всеми сторонними зарядами, в том числе и с теми, от которых зависит векторный потенциал. Это можно сделать путём использования концепции скалярно-векторного потенциала [4-7].

2. Концепция скалярно-векторного потенциала.

Законы индукции имеют симметричный характер [2-5]:

$$\begin{gathered}\oint \vec{E}'dl' = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} + \oint \left[\vec{v}\times\vec{B}\right]dl' \\ \oint \vec{H}'dl' = \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{s} - \oint \left[\vec{v}\times\vec{D}\right]dl'\end{gathered}, \qquad (2.1)$$

или

$$\begin{gathered}rot\vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + rot\left[\vec{v}\times\vec{B}\right] \\ rot\vec{H}' = \frac{\partial \vec{D}}{dt} - rot\left[\vec{v}\times\vec{D}\right]\end{gathered}. \qquad (2.2)$$

В этих соотношениях: $\vec{E}$ и $\vec{H}$ - электрическое и магнитное поле, $\vec{D}$ и $\vec{B}$ - электрическая и магнитная индукция, $\vec{v}$ - относительная скорость между штрихованной и исходной системой отсчёта (ИСО).

Для постоянных полей эти соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \left[\vec{v} \times \vec{B}\right] \\ \vec{H}' &= -\left[\vec{v} \times \vec{D}\right] \end{aligned} . \tag{2.3}$$

В соотношениях (2.1-2.3), предполагающих справедливость преобразований Галилея, штрихованные и не штрихованные величины представляют поля и элементы в движущейся и неподвижной ИСО соответственно. Следует заметить, что преобразования (2.3) ранее можно было получить только из преобразований Лоренца.

Соотношения (2.3) свидетельствуют о том, что в случае относительного движения систем отсчета, между полями $\vec{E}$ и $\vec{H}$ существует перекрестная связь, т.е. движение в полях $\vec{H}$ приводит к появлению полей $\vec{E}$ и наоборот. Из этих соотношений вытекают дополнительные следствия, которые впервые были рассмотрены в работе [2]. Электрическое поле $E = \dfrac{g}{2\pi\varepsilon r}$ за пределами заряженного длинного стержня, на единицу длины которого приходится заряд g, убывает по закону $\dfrac{1}{r}$, где r - расстояние от центральной оси стержня до точки наблюдения.

Если параллельно оси стержня в поле E начать двигать со скоростью Δv другую ИСО, то в ней появится дополнительное магнитное поле $\Delta H = \varepsilon E \Delta v$. Если теперь по отношению к уже движущейся ИСО начать двигать третью систему отсчета со скоростью Δv, то уже за счет движения в поле ΔH появится добавка к электрическому полю $\Delta E = \mu\varepsilon E\left(\Delta v\right)^2$. Данный процесс можно продолжать и далее, в результате чего может быть получен ряд, дающий величину электрического поля $E'_v\left(r\right)$ в движущейся ИСО при достижении скорости $v = n\Delta v$, когда $\Delta v \to 0$, а $n \to \infty$. В конечном итоге в движущейся ИСО величина динамического электрического поля окажется больше, чем в исходной и определиться соотношением:

$$E'\left(r,v_{\perp}\right)=\frac{g\,ch\dfrac{v_{\perp}}{c}}{2\pi\varepsilon r}=E\,ch\frac{v_{\perp}}{c}.$$

Если речь идет об электрическом поле одиночного заряда e, то его электрическое поле будет определяться соотношением:

$$E'\left(r,v_{\perp}\right)=\frac{e\,ch\dfrac{v_{\perp}}{c}}{4\pi\varepsilon r^{2}}\quad, \tag{2.4}$$

где $v_{\perp}$ - нормальная составляющая скорости заряда к вектору, соединяющему движущийся заряд и точку наблюдения.

Выражение для скалярного потенциала, создаваемого движущимся зарядом, для этого случая запишется следующим образом:

$$\varphi'(r,v_{\perp})=\frac{e\,ch\dfrac{v_{\perp}}{c}}{4\pi\varepsilon r}=\varphi(r)\,ch\frac{v_{\perp}}{c}, \tag{2.5}$$

где $\varphi(r)$ - скалярный потенциал неподвижного заряда. Потенциал $\varphi'(r,v_{\perp})$ может быть назван скалярно-векторным, т.к. он зависит не только от абсолютной величины заряда, но и от скорости и направления его движения по отношению к точке наблюдения. Максимальное значение этот потенциал имеет в направлении нормальном к движению самого заряда.

3. Лагранжев формализм в концепции скалярно-векторного потенциала.

Скалярный потенциал $\varphi(r)$ в точке нахождения заряда определяется всеми окружающими зарядами g_j и определяется соотношением:

$$\varphi(r)=\sum_j \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{g_j}{r_j}$$

Каждый движущийся заряд создаёт в точке наблюдения потенциал, определяемый соотношением (2.5).

Если данную точку пространства окружает какое-то количество движущихся и неподвижных зарядов, то для нахождения скалярного потенциала в заданной точке необходимо произвести суммирование их потенциалов:

$$\varphi'(r)=\sum_j \varphi(r_j)ch\frac{v_{j\perp}}{c}=\sum_j \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{g_j}{r_j}ch\frac{v_{j\perp}}{c}$$

С учётом этого обстоятельством потенциальная часть лагранжиана заряда e, находящегося в окружении неподвижных и движущихся сторонних зарядов, запишется следующим образом:

$$L=-e\sum_j \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{g_j}{r_j}ch\frac{v_{j\perp}}{c}$$

В том случае, если заряд e сам движется относительно выбранной ИСО со скоростью v, то его лагранжиан, как и ранее, определяется соотношением (2. 1) с той лишь разницей, что в качестве скоростей $v_{j\perp}$ берутся относительные скорости зарядов по отношению к заряду e и добавляется член, определяющий кинетическую энергию самого заряда. Лагранжиан для малых скоростей при этом принимает вид:

$$L=\frac{mv^2}{2}-e\sum_j \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{g_j}{r_j}ch\frac{v_{j\perp}}{c}$$

Такой подход лишен указанного уже недостатка, т.к. удовлетворяет полному консерватизму системы, поскольку в лагранжиане учтены все взаимодействия заряд с окружающими его зарядами.

Заключение

Одним из методов решения задач механики является лагранжев фомализм. Под функцией Лагранжа или лагранжианом в механике понимают разность между кинетической и потенциальной энергией рассматриваемой системы. Если проинтегрировать лагранжиан по времени, то получим первую главную функцию Гамильтона, называемую действием. В общем случае кинетическая энергия системы зависит от скорости, а потенциальная энергия зависит от координат. При условии консерватизма системы лагранжев формализм предполагает принцип наименьшего действия, когда система при своём движении выбирает путь, при котором действие является минимальным. Однако запись лагранжиана, принятая в электродинамике не в полной мере удовлетворяет условию консерватизма системы. Векторный потенциал, в котором движется заряд, создают сторонние движущиеся заряды, и движущийся заряд взаимодействует не с полем векторного потенциала, а с движущимися зарядами, влияя на их движение. Но существующие модели это обстоятельство не учитывает, т.к. векторный потенциал выступает самостоятельной субстанцией, с которой и взаимодействует движущийся заряд. Более того, в обобщённый импульс движущегося заряда вводится скалярное произведение его скорости и векторного потенциала, в котором заряд движется. Но этот член представляет не кинетическую, а потенциальную энергию, что противоречит определению импульса в механике. С этими обстоятельствами и связаны те ошибки, которые имеют место в трудах по электродинамике. В работе показано, что использование концепции скалярно-векторного потенциала для вычисления лагранжиана движущегося заряда даёт возможность исключить ошибки, имеющиеся в современной электродинамике.

Литература.

1. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. М: Мир, 1977.
2. Левич В. Г. Курс теоретической физики. М: Физматгиз, 1962. - 696 с.
3. Ландау Л. Д. Лифшиц Е. М. Теория поля. М: Наука, 1988. – 509 с.

4. Менде Ф. Ф. К вопросу об уточнении уравнений элетромагнитной индукции. - Харьков, депонирована в ВИНИТИ, №774-В88 Деп., 1988.

5. Менде Ф. Ф. Существуют ли ошибки в современной физике. Харьков, Константа, 2003.

6. Mende F. F. On refinement of certain laws of classical electrodynamics, arXiv, physics/0402084.

7. Mende F. F. Conception of the scalar-vector potential in contemporary electrodynamics, arXiv.org/abs/physics/0506083.

8. F. F. Mende, Concept of Scalar-Vector Potential in the Contemporary Electrodynamic, Problem of Homopolar Induction and Its Solution, *International Journal of Physics, 2014, Vol. 2, No. 6, 202-210*

9. F. F. Mende, Consideration and the Refinement of Some Laws and Concepts of Classical Electrodynamics and New Ideas in Modern Electrodynamics, *International Journal of Physics, 2014, Vol. 2, No. 8, 231-263.*

10. F. F. Mende. What is Not Taken into Account and they Did Not Notice Ampere, Faraday, Maxwell, Heaviside and Hertz. *AASCIT Journal of Physics. Vol. 1, No. 1, 2015, pp. 28-52.*

11. F. F. Mende. Dynamic Scalar Potential and the Electrokinetic Electric Field. *AASCIT Journal of Physics. Vol. 1, No. 1, 2015, pp. 53-57.*