Ленгмюровская частота и её значение для физики плазмы

Ф. Ф. Менде

Ленгмюровская частота очень важным электродинамическим параметром представляет резонанс тока смещения и тока проводимости при наложение на плазму переменных электрических полей, и вводится в ряде фундаментальных работ по физике плазмы [1-3].

Ленгмюровская частота определяется соотношением

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L_k \varepsilon_0}},$$

где ε_0 - диэлектрическая проницаемость вакуума L_k - кинетическая индуктивность зарядов [4].

При распространении в плазме электромагнитных волн основную роль играют электроны, поскольку их масса значительно меньше, чем масса ионов. Уравнение движения электрона в электрическом поле имеет вид:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E}, \quad (1)$$

где m и e – масса и заряд электрона, $\vec{E}$ – напряженность электрического поля, $\vec{v}$ – скорость движения заряда.

В работе [5] показано, что это уравнение может быть использовано и для описания движения электронов в горячей плазме. Поэтому оно может быть распространено и на этот случай.

Используя выражение для плотности тока

$$\vec{j} = ne\vec{v}, \quad (2)$$

из (1) получаем плотность тока проводимости

$$\vec{j}_L = \frac{ne^2}{m} \int \vec{E}\, dt \ . \tag{3}$$

В соотношении (2) и (3) величина n представляет плотность электронов. Введя обозначение

$$L_k = \frac{m}{ne^2} \ , \tag{4}$$

находим

$$\vec{j}_L = \frac{1}{L_k} \int \vec{E}\, dt \ . \tag{5}$$

В данном случае величина L_k представляет удельную кинетическую индуктивность носителей заряда. Ее существование связано с тем, что заряд, имея массу, обладает инерционными свойствами. Для случая гармонических полей $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \omega t$ соотношение (5) запишется:

$$\vec{j}_L = -\frac{1}{\omega L_k} \vec{E}_0 \cos \omega t \ . \tag{6}$$

Из соотношения (5) и (6) видно, что $\vec{j}_L$ представляет индуктивный ток, т.к. его фаза запаздывает по отношению к напряжённости электрического поля на угол $\frac{\pi}{2}$.

Если заряды находятся в вакууме, то при нахождении суммарного тока нужно учитывать и ток смещения

$$\vec{j}_\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \vec{E}_0 \cos \omega t \, .$$

Видно, что этот ток носит ёмкостной характер, т.к. его фаза на $\frac{\pi}{2}$ опережает фазу напряжённости электрического поля. Таким образом, суммарная плотность тока составит :

$$\vec{j}_{\Sigma} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{L_k}\int \vec{E}\, dt\,,$$

или

$$\vec{j}_{\Sigma} = \left(\omega\varepsilon_0 - \frac{1}{\omega L_k} \right) \vec{E}_0 \cos\omega t = \omega\varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \vec{E}_0 \cos\omega t = \omega\varepsilon^*(\omega)\vec{E}_0 \cos\omega t\,. \tag{7}$$

Параметр $\varepsilon^*(\omega)$ литературе, касающейся плазмы, принято называть диэлектрической проницаемостью плазмы, хотя это и не так. Как видно из соотношения (7) это сборный параметр, в который кроме частоты входит ещё несколько параметров.

Таким образом, при наличии в плазме переменного электрического поля в ней одновременно текут два тока различной природы: ток смещения и ток проводимости. Эти токи конкурирующие, поскольку у них различная зависимость от частоты электрического поля. Равенство нулю члена в скобках и означает резонанс этих токов.

Как нужно поступать, если в нашем распоряжении имеются величины $\varepsilon^*(\omega)$, а нам необходимо вычислить полную удельную энергию, накопленную в плазме при наличии в ней переменных электрических полей? Очевидно, при этом следует учесть не только энергию электрических полей

$$W_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\,,$$

Но и кинетическую энергию носителей зарядов

$$W_j = \frac{1}{2} L_k j_0^2\,. \tag{8}$$

Для этого следует воспользоваться соотношение, приведенным в работе

$$W_{\Sigma} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d\left(\omega\varepsilon^*(\omega)\right)}{d\omega} E_0^2\,, \tag{9}$$

откуда получаем

$$W_{\Sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{2}\ \frac{1}{\omega^2 L_k}\ E_0^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{2} L_k j_0^2\ .$$

Полученное соотношение, как и предполагалось, показывает, что удельная энергия состоит из потенциальной энергии электрических полей и кинетической энергии носителей зарядов.

При рассмотрении любых сред конечной задачей является нахождение волнового уравнения. В данном случае эта задача уже практически решена.

Уравнения Максвелла для этого случая имеют вид:

$$\begin{aligned} rot\ \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial\ \vec{H}}{\partial\ t}, \\ rot\ \vec{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial\ \vec{E}}{\partial\ t} + \frac{1}{L_k}\int \vec{E}\ dt, \end{aligned} \qquad (10)$$

где ε_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемость вакуума.

Из (10) получаем:

$$rot\ rot\ \vec{H} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial\ t^2} + \frac{\mu_0}{L_k}\vec{H} = 0. \qquad (11)$$

Для случая полей, не зависящих от времени, уравнение (11) переходит в уравнение Лондонов

$$rot\ rot\ \vec{H} + \frac{\mu_0}{L_k}\vec{H} = 0\ ,$$

где $\lambda_L{}^2 = \frac{L_k}{\mu_0}$ – лондоновская глубина проникновения.

Интересно рассмотреть случай, когда электромагнитная волна распространяется между двумя проводящими плоскостями, между которыми расположена плазма[6].

Решение системы уравнений (10) даёт возможность определить волновое число:

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_\rho^2}{\omega^2}\right), \qquad (12)$$

и групповую и фазовую скорости

$$v_g^2 = c^2\left(1 - \frac{\omega_\rho^2}{\omega^2}\right), \qquad (13)$$

$$v_F^2 = \frac{c^2}{\left(1 - \frac{\omega_\rho^2}{\omega^2}\right)}, \qquad (14)$$

где $c = \left(\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}\right)^{1/2}$ - скорость света в вакууме.

Если частота равна ленгмюровской частоте, то фазовая скорость электромагнитной волны равна бесконечности, что соответствует поперечному резонансу на плазменной частоте. Следовательно, в каждый момент времени распределение полей и токов в такой линии однородно и не зависит от координаты z, а ток в плоскостях линии в направлении z отсутствует. Это означает, что вместо проводящих плоскостей могут быть использованы любые плоскости или устройства, ограничивающие плазму с двух сторон.

Из соотношений (12– 14) нетрудно видеть, что в точке $\omega = \omega_p$ имеет место поперечный резонанс с бесконечной добротностью. При наличии потерь в резонаторе будет иметь место затухание, а в длинной линии в этом случае $k_z \neq 0$, и в линии будет распространяться затухающая поперечная волна, направление распространения которой будет нормально направлению движения зарядов.

До сих пор рассматривался физически нереализуемый случай, когда потери в плазме отсутствуют, что соответствует бесконечной добротности плазменного резонатора. Если потери имеются, причем совершенно не имеет значения, какими физическими процессами такие потери обусловлены, то добротность плазменного резонатора будет конечной величиной. Для такого случая уравнения Максвелла будут иметь вид:

$$rot\ \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial\ \vec{H}}{\partial\ t},$$

$$rot\ \vec{H} = \sigma_{p.ef}\ \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial\ \vec{E}}{\partial\ t} + \frac{1}{L_k}\int \vec{E}\ dt. \qquad (15)$$

Наличие потерь учитывается членом $\sigma_{p.ef}\vec{E}$, причем, употребляя возле проводимости индекса ef , тем самым подчеркивается, что нас не интересует сам механизм потерь, а интересует только сам факт их существования. Величину σ_{ef} определяет добротность плазменного резонатора. Для измерения σ_{ef} следует выбрать отрезок линии длиной z_0, величина которого значительно меньше длины волны в диссипативной плазме. Такой отрезок будет эквивалентен контуру с сосредоточенными параметрами:

$$C = \varepsilon_0 \frac{bz_0}{a}, \qquad (16)$$

$$L = L_k \frac{a}{bz_0}, \qquad (17)$$

$$G = \sigma_{\rho.ef} \frac{bz_0}{a}, \qquad (18)$$

где G – проводимость, подключенная параллельно C и L.

Проводимость и добротность в таком контуре связаны соотношением:

$$G = \frac{1}{Q_\rho}\sqrt{\frac{C}{L}},$$

откуда, учитывая (16 – 18), получаем:

$$\sigma_{\rho.ef} = \frac{1}{Q_\rho}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{L_k}}. \qquad (19)$$

Таким образом, измеряя собственную добротность такого плазменного резонатора, можно определить $\sigma_{p.ef}$. Используя (15) и (19) получим:

$$rot\ \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial\ \vec{H}}{\partial\ t},$$

$$rot\ \vec{H} = \frac{1}{Q_\rho}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{L_k}}\ \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial\ \vec{E}}{\partial\ t} + \frac{1}{L_k}\int \vec{E}\ dt. \qquad (20)$$

Рассмотрим решение системы уравнений (20) в точке $\omega = \omega_p$, при этом, поскольку

$$\varepsilon_0 \frac{\partial\ \vec{E}}{\partial\ t} + \frac{1}{L_k}\int \vec{E}\ dt = 0,$$

получаем

$$rot\ \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial\ \vec{H}}{\partial\ t},$$

$$rot\ \vec{H} = \frac{1}{Q_P}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{L_k}}\ \vec{E}.$$

Эти соотношения и определяют волновые процессы в точке резонанса, если в плазме имеются потери.

Если потери в плазме, заполняющей линию малы, а к линии подключен сторонний источник тока, то можно положить:

$$rot\ \vec{E} \cong 0,$$

$$\frac{1}{Q_p}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{L_k}}\ \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial\ \vec{E}}{\partial\ t} + \frac{1}{L_k}\int \vec{E}\ dt = \vec{j}_{CT}, \qquad (21)$$

где $\vec{j}_{CT}$ – плотность сторонних токов.

Проинтегрировав (21) по времени и разделив обе части на ε_0, получим

$$\omega_p^2\ \vec{E} + \frac{\omega_p}{Q_p}\cdot\frac{\partial\ \vec{E}}{\partial\ t} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial\ t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{\partial\ \vec{j}_{CT}}{\partial\ t}. \qquad (22)$$

Если (22) проинтегрировать по поверхности нормальной к вектору $\vec{E}$ и ввести электрический поток как $\varPhi_E = \int \vec{E} d\vec{S}$, получим:

$$\omega_p^2 \varPhi_E + \frac{\omega_p}{Q_p} \cdot \frac{\partial \varPhi_E}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varPhi_E}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial I_{CT}}{\partial t}, \qquad (23)$$

где I_{CT} – сторонний ток.

Уравнение (23) является уравнением гармонического осциллятора с правой частью, характерное для двухуровневых лазеров.

Литература

1. Ахиезер А. И. Физика плазмы М: Наука, 1974 – 719 с.

2. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. – М.: Наука. 1967 г. - 684 с.

3. Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Колебания и волны в плазменных средах. Изд. Московского университета, 1990.- 272 с.

4. Менде Ф. Ф., Спицын А. И. Поверхностный импеданс сверхпроводников. Киев, Наукова думка, 1985.- 240 с.

5. Л. А. Арцимович, Р. З. Сагдеев. Физика плазмы для физиков,Москва, Атом издат, 1979, 317 с.

6. Mende F. F. Transversal plasma resonance in a nonmagnetized plasma and possibilities of practical employment of it, arxiv.org/abs/physics//0506081.

7. Ярив А. Квантовая электродинамика и нелинейная оптика. М: Сов.

радио, 1973.- 454 с.